

ОРКШОП ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ И
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ,
ПОСВЯЩЕННЫЙ ЮБИЛЕЮ Д.Ф.-М.Н., ПРОФЕССОРА ВАТУЛЬЯНА А.О.

Обратные коэффициентные задачи для плоских анизотропных волноводов



Явруян Оксана Вячеславовна

Научная школа проф. Ватульяна А.О.



ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВНЦ РАН, Владикавказ

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, Ростов-на-Дону

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ

задачи определения коэффициентов дифференциальных операторов по измеренным граничным полям

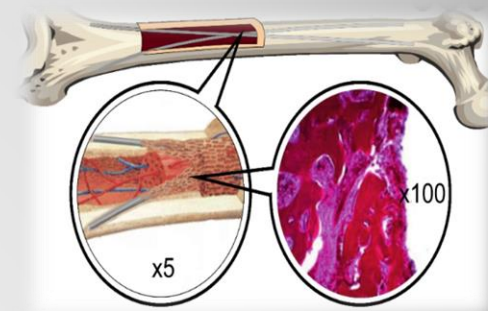
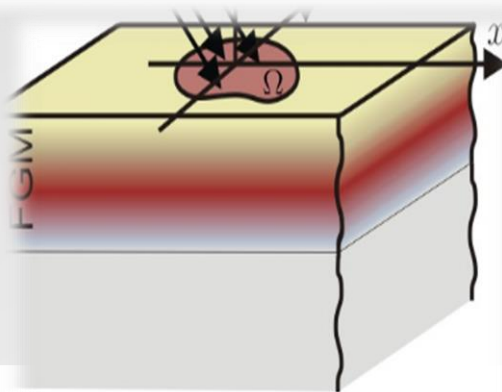
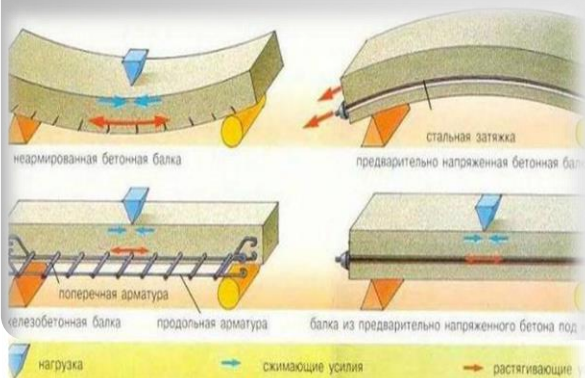
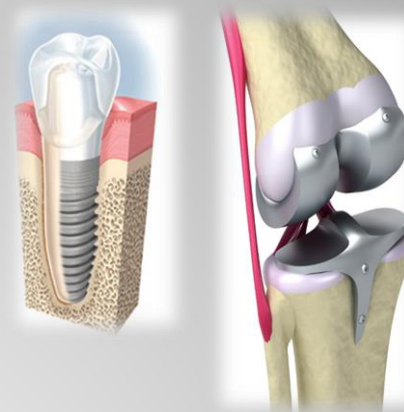
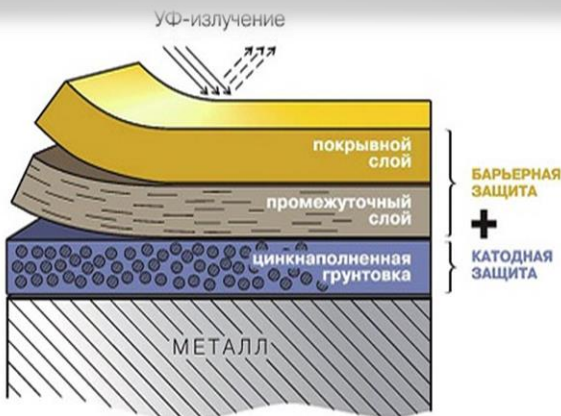
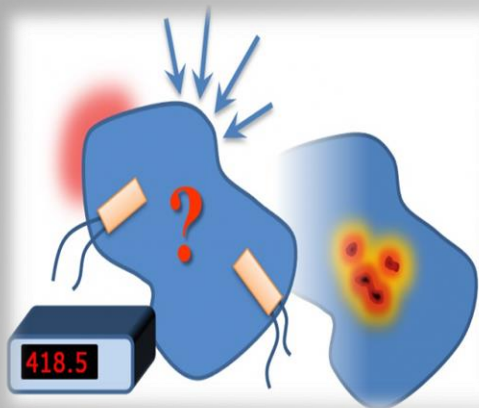


Fig 2. Bone formation around the implant

Сжатие и растяжение материала делает его более устойчивым к нагрузкам.

Покрyтие ФГМ под поверхностной нагрузкой

Волновые процессы в упругих волноводах:

Бабешко В.В, Белоконь А.В., Ворович И.И., Мелешко В.В.,
Ватульян А.О., Гетман И.П., Глушковы Е.В. и Н.В., Голуб М.В.,
Гринченко В.Т., Ерофеев В.И., Ляпин А.А., Наседкин А.В.,
Суворова Т.В., Толоконников Л.А., Устинов Ю.А.

Обратные коэффициентные задачи:

Беллман Р., Калаба Р.,
Ватульян А.О., Соловьев А.Н., Недин Р.Д., Юров В.О., Дударев В.В.
Гончарский А.В., Кабанихин С.И.,
Романов В.Г, Яхно В.Г.,
Vui H.D., Bonnet M., Constantinescu A., Chen Z., Zhang H. и
многие другие авторы

- **Основные методы решения конечномерных обратных задач**
 - **Метод наименьших квадратов**
 - **Метод квазилинеаризации**
 - **Оптимизационные методы**

- **Основные методы решения обратных коэффициентных задач с переменными характеристиками**
 - **На основе слабой постановки**
 - **Метод линеаризации**
 - **Построение итерационного процесса**

Ключевой вопрос в проблеме идентификации неоднородных механических свойств - вопрос выбора физического метода воздействия на объект и последующий анализ измеренного отклика и составление операторного соотношения.

1) Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Наука, 1984. 262 с.

2) Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Наука, 1990. 303с.

Основные этапы предлагаемого подхода

1. Приведение исходных двумерных задач для плоских и цилиндрических волноводов в рамках рассматриваемых моделей (упругая, вязкоупругая модель) к более простым одномерным операторным соотношениям^{1),2)}.
2. Линеаризация полученных задач и разделение исходной задачи на подзадачи, в которых отделены восстанавливаемые функции за счет анализа спектрального пучка и составления краевых задач для моментов соответствующих полей.
3. Последовательное решение полученных систем операторных уравнений с использованием **итерационных схем**, на каждом шаге которых определяются поправки к восстанавливаемым функциям.

Основные пункты итерационной схемы выполнены в соответствии с результатами, изложенными в ³⁾:

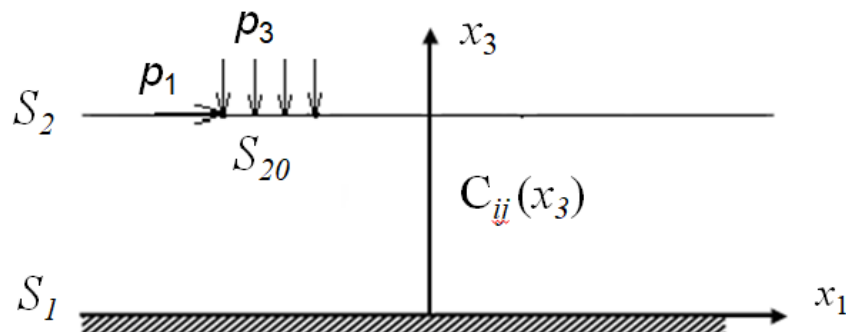
- *выбор начального приближения (в классе постоянных, линейных или квадратичных функций двумя способами - с использованием метода квазилинеаризации либо на основе минимизации функционала невязки);*
- *нахождение поправок на основе решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода;*
- *переход к следующей итерации.*

¹⁾ Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Наука, 1984. 262 с.

²⁾ Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Наука, 1990. 303с.

³⁾ Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. Изд-во: ФИЗМАТЛИТ, 2019. 271 с.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} + \rho(x_3)\omega^2 u_i = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x_3)u_{k,l}, \\ u_i |_{S_1} = 0; \\ \sigma_{i3} |_{S_{20}} = p_i, \quad \sigma_{i3} = 0, \quad x \in S_2 \setminus S_{20} \end{array} \right. \quad (1)$$

Обратная коэффициентная задача заключается в определении законов изменения характеристик по некоторым следам решений, измеренных на верхней границе волновода в режиме частотного зондирования

$$u_i(x_1, \omega) = f_i(x_1, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad x_1 \in S_1 \quad (2)$$

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,3} + C_{11}u_{1,11} + C_{13}u_{3,31} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ (C_{13}u_{1,1} + C_{33}u_{3,3})_{,3} + C_{55}(u_{1,31} + u_{3,11}) + \rho\omega^2 u_3 = 0, \\ C_{11}u_{1,1} + C_{13}u_{3,3} |_{S_2} = \begin{cases} p_1, & x_1 \in S_{20} \\ 0, & x_1 \notin S_{20} \end{cases}, \\ C_{13}u_{1,1} + C_{33}u_{3,3} |_{S_2} = \begin{cases} p_3, & x_1 \in S_{20} \\ 0, & x_1 \notin S_{20} \end{cases}, \\ u_1 |_{S_1} = 0, \quad u_3 |_{S_1} = 0 \end{array} \right.$$

Обратная задача А сводится к восстановлению функций

$$C_{33}(x_3), C_{13}(x_3), C_{55}(x_3), C_{11}(x_3)$$

по информации

$$u_i(x_1, \omega) |_{S_2} = f_i(x_1, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad i = 1, 3$$

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_{44}u_{2,3})_{,3} + C_{66}u_{2,11} + \rho\omega^2 u_2 = 0, \\ C_{44}u_{2,3} |_{S_2} = \begin{cases} p_2, & x_1 \in S_{20} \\ 0, & x_1 \notin S_{20} \end{cases} \\ u_2 |_{S_1} = 0 \end{array} \right.$$

Обратная задача Б сводится к восстановлению функций

$$C_{44}(x_3), C_{66}(x_3)$$

по информации

$$u_2(x_1, \omega) |_{S_2} = f_2(x_1, \omega), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4]$$

Разделение исходной задачи

Задача А:

$$\begin{cases} (C_{55}U_{1,3} - i\alpha_1 C_{55}U_3)_{,3} - i\alpha_1 C_{13}U_{3,3} + (\rho\omega^2 - \alpha_1^2 C_{11})U_1 = 0 \\ (C_{33}U_{3,3} - i\alpha_1 C_{13}U_1)_{,3} - i\alpha_1 C_{55}U_{1,3} + (\rho\omega^2 - \alpha_1^2 C_{55})U_3 = 0 \\ U_i|_{x_3=0} = 0, \quad i=1,3 \\ C_{55}U_{1,3} - i\alpha_1 C_{55}U_3|_{x_3=h} = \tilde{p}_1, \quad C_{33}U_{3,3} - i\alpha_1 C_{13}U_1|_{x_3=h} = \tilde{p}_3 \end{cases} \quad (4)$$

Задача Б:

$$\begin{cases} (C_{44}U_{2,3})_{,3} + (\rho\omega^2 - \alpha_1^2 C_{66})U_2 = 0 \\ U_2|_{x_3} = 0, \quad C_{44}U_{2,3}|_{x_3=h} = \tilde{p}_2 \end{cases} \quad (5)$$

Линеаризация безразмерной краевой задачи

$$x_3 = hx, U_i = hq_i, q = (u, v, w), k^2 = \rho\omega^2 h^2 / C_{55}^{(0)}, C_{ij} = C_{55}^{(0)} c_{ij}, i=1,2,3$$

$$u(\alpha_1, x, k) = u_0(x, k) + \alpha_1 u_1(x, k) + \alpha_1^2 u_2(x, k) + \dots \quad (6)$$

$$w(\alpha_1, x, k) = w_0(x, k) + \alpha_1 w_1(x, k) + \alpha_1^2 w_2(x, k) + \dots$$

$$v(\alpha_1, x, k) = v_0(x, k) + \alpha_1 v_1(x, k) + \alpha_1^2 v_2(x, k) + \dots$$

ОКЗ для УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Составим краевые задачи при одинаковых степенях α_1

$$\alpha_1^0 : \begin{cases} (c_{55}u_0')' + k^2 u_0 = 0 \\ u_0(0) = 0 \\ c_{55}(1)u_0'(1) = P_1^{(0)} \\ u_0(1, k) = f_1^{(0)}(k) \end{cases} \begin{cases} (c_{33}v_0')' + k^2 v_0 = 0 \\ v_0(0) = 0 \\ c_{33}(1)v_0'(1) = P_3^{(0)} \\ v_0(1, k) = f_3^{(0)}(k) \end{cases} \begin{cases} (c_{44}w_0')' + k^2 w_0 = 0 \\ w_0(0) = 0 \\ c_{44}(1)w_0'(1) = P_2^{(0)} \\ w_0(1, k) = f_2^{(0)}(k) \end{cases} \quad (7)$$

$$\alpha_1^1 : \begin{cases} (c_{55}u_1')' + k^2 u_1 - c_{13}v_1' - (c_{55}v_0)' = 0 \\ (c_{33}v_1')' + k^2 v_1 - c_{55}u_1' - (c_{13}u_0)' = 0 \\ u_1(0) = v_1(0) = 0 \\ c_{55}(1)u_1'(1) - c_{55}(1)v_0(1) = P_1^{(1)}, \\ -c_{13}(1)u_0(1) + c_{33}(1)v_1'(1) = P_3^{(1)} \\ u_1(1, k) = f_1^{(1)}(k), v_1(1, k) = f_3^{(1)}(k) \end{cases} \quad (8)$$

$$\alpha_1^2 : \begin{cases} (c_{55}u_2')' + k^2 u_2 - c_{11}u_0 + c_{13}v_1' + (c_{55}v_1)' = 0 \\ (c_{33}v_2')' + k^2 v_2 + c_{55}u_1' - c_{55}v_0 + (c_{13}u_1)' = 0 \\ u_2(0) = v_2(0) = 0, \\ c_{55}(1)u_2'(1) + c_{55}(1)v_1(1) = P_1^{(2)}, \\ c_{33}(1)v_2'(1) + c_{13}(1)u_1(1) = P_3^{(2)}, \\ u_2(1, k) = f_1^{(2)}(k), v_2(1, k) = f_3^{(2)}(k), \end{cases} \begin{cases} (c_{44}w_2')' - c_{66}w_0 + k^2 w_2 = 0 \\ w_2(0) = 0, \\ c_{44}(1)w_2'(1) = P_2^{(2)} \\ w_2(1, k) = f_2^{(2)}(k) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} v'(x, \kappa) = -\kappa^2 u(x, \kappa) \\ u'(x, \kappa) = v(x, \kappa) / g(x) \\ u(0, \kappa) = 0, v(1, \kappa) = 1 \end{cases} \quad u(1, \kappa) = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (10)$$

Решение прямой задачи

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$u(x, \kappa) = \int_0^1 K(\xi, x, \kappa) u(\xi, \kappa) d\xi + \int_0^x \frac{d\eta}{g(\eta)} \quad (11)$$

$$K(\xi, x, \kappa) = \kappa^2 \int_0^{\min\{\xi, x\}} \frac{d\eta}{g(\eta)}, \quad x, \xi \in [0, 1]$$

Линеаризация краевой задачи

$$\begin{aligned} u(x, \kappa) &= u_0(x, \kappa) + \varepsilon u_1(x, \kappa), \\ g(x, \kappa) &= g_0(x, \kappa) + \varepsilon g_1(x, \kappa). \end{aligned} \quad (12)$$

Формулировка интегрального уравнения Фредгольма
1-го рода

$$\int_0^1 g_1(x) u_0'^2(x, \kappa) dx = u_0(1, \kappa) - f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (13)$$

ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

1. ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА [3]

1.1. Пусть известно 0 приближение неизвестной функции $g_0(x)$, тогда $u_0(x)$:

$$u_0(x) = \int_0^1 K_0(\xi, x) u_0(\xi) d\xi + p \int_0^x \frac{d\eta}{g_0(\eta)} \quad (14)$$

$$K_0(\xi, x) = \kappa^2 \int_0^{\min\{\xi, x\}} \frac{d\eta}{g_0(\eta)}, \quad \xi \in [0, 1]$$

1.2. Определяем поправки восстанавливаемой функции из решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$\int_0^1 g_1(x) u_0'^2(x, \kappa) dx = p(u_0(1, \kappa) - f(\kappa)) \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (15)$$

1.3. Продолжаем цикл 1.1-1.3, пока не сработает условие выхода

$$\begin{aligned} \|\delta g\|_{C[0,1]} &< \varepsilon \\ \|u_{n-1}(1, \kappa) - f(\kappa)\|_{C[\kappa_1, \kappa_2]} &< \varepsilon \\ n &> N \end{aligned} \quad (16)$$

1.4. Переопределяем начальное состояние

$$g_0(x) := g_0(x) + g_1(x)$$

ОКЗ ДЛЯ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

СХЕМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

1. Восстанавливаются функции $c_{55}(x), c_{44}(x), c_{33}(x)$ по итерационной схеме, а также определяются решения соответствующих задач u_0, w_0, v_0
2. Осуществляется реконструкция функции $c_{13}(x)$ из решения ИУ Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^1 c_{13}(x) v_0'(x, k) u_0(x, k) dx = R_1(k), \quad k \in [k_1, k_2], \quad (17)$$

$$R_1(k) = -P_1^{(0)} f_1^{(1)}(k) + P_1^{(1)} f_1^{(0)}(k) + \int_0^1 c_{55}(x) v_0(x, k) u_0'(x, k) dx.$$

- 2.1. Определяются решения соответствующих задач $u_1(x, k), v_1(x, k)$

3. Осуществляется реконструкция функции $c_{11}(x)$ из решения ИУ Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^1 c_{11}(x) u_0^2(x, k) dx = R_2(k) \quad (18)$$

$$R_2(k) = P_1^{(2)} f_1^{(0)}(k) - P_1^{(0)} f_1^{(2)}(k) + \int_0^1 (c_{13}(x) v_1'(x, k) u_0(x, k) - c_{55}(x) v_1(x, k) u_0'(x, k)) dx$$

4. Осуществляется восстановление функции $c_{66}(x)$ из решения ИУ Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^1 c_{66}(x) w_0^2(x, k) dx = -P_2^{(0)} f_2^{(2)}(k) + P_2^{(2)} f_2^{(0)}(k), \quad k \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (19)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

- ✓ Начальное приближение в задачах выбиралось из условия минимума функционала невязки в классе линейных функций
- ✓ Для построения ядра интегрального уравнения Фредгольма 1-ого рода, которое представляет собой производную от функции, заданной поточечно использовался регуляризирующий алгоритм на основе процедуры аппроксимации функции сплайн-функциями 3-го порядка
- ✓ Решение интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода построено на основе регуляризирующего алгоритма Тихонова А.Н.
- ✓ Восстановление последовательное.
- ✓ Частотный диапазон выбирается из анализа АЧХ при $x=1$, между первой и второй резонансными частотами

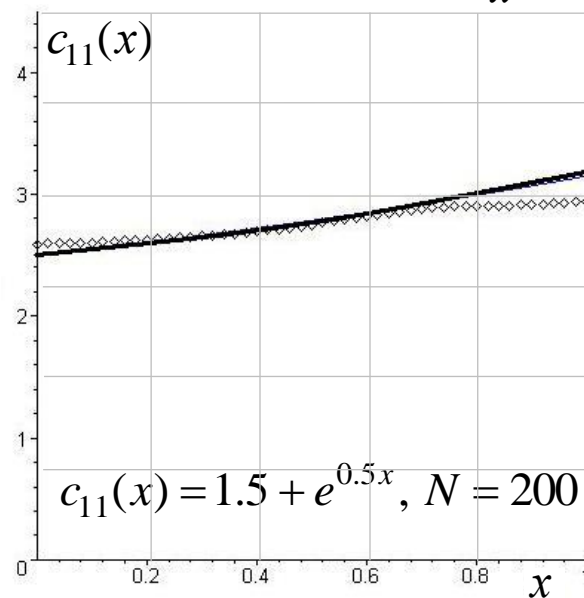
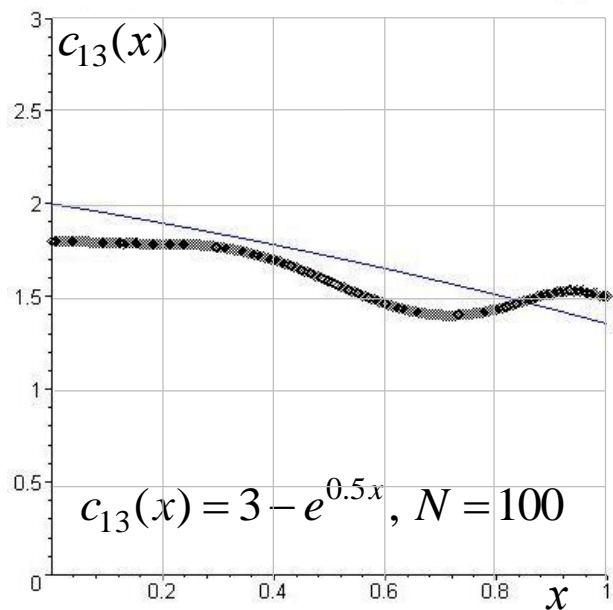
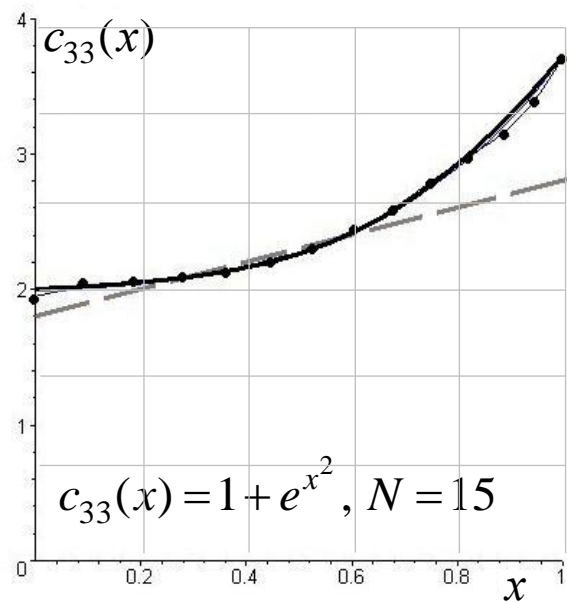
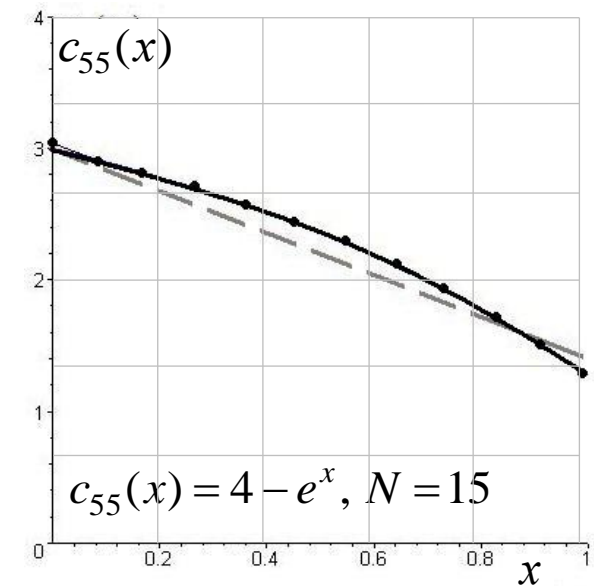


Рис. 1 Результаты восстановления свойств неоднородной полосы.

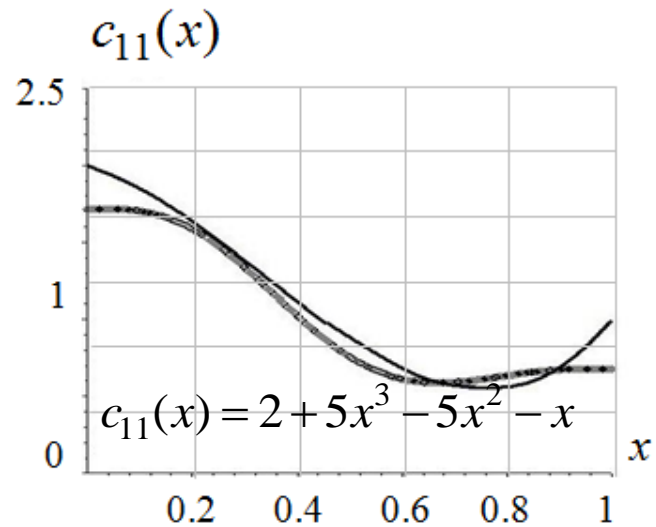
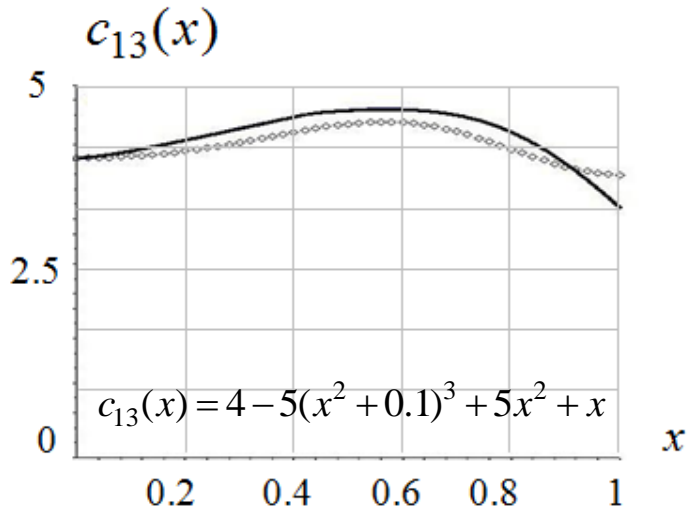
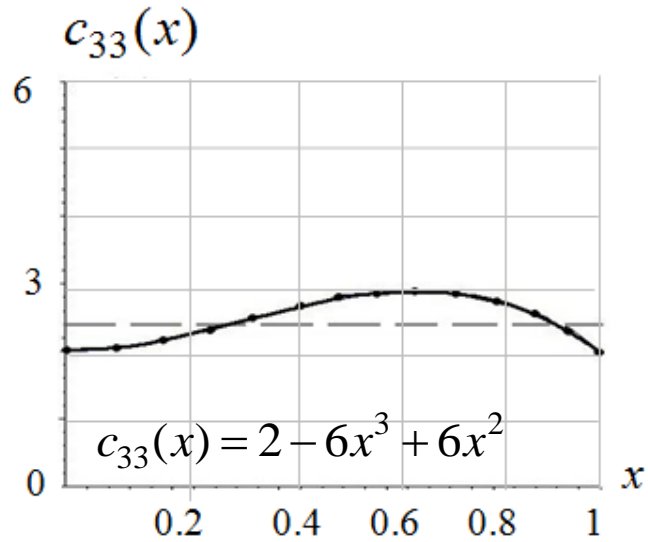
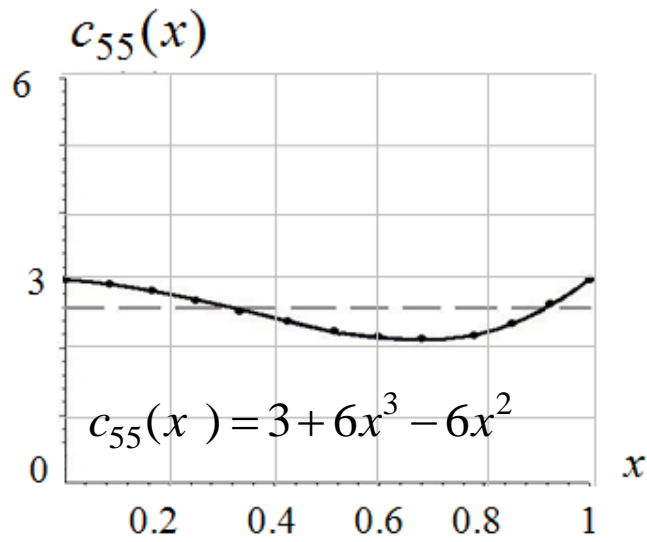


Рис. 2 Результаты восстановления свойств неоднородной упругой полосы.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!